АКАДЕМИЈА ТЕХНИЧКО-ВАСПИТАЧКИХ СТРУКОВНИХ СТУДИЈА

ОДСЕК НИШ

MATEMATIKA $(3+2)$

dr Milica Cvetković

Sadržaj

Sadržaj

Sadržaj

Sadržaj

Diferencijal funkcija

Diferencijal funkcije

Definicija

Diferencijal funkcije $\mathbf{y = f(x)}$, *u oznaci* $\mathbf{df(x)}$, *predstavlja proizvod:*

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x \ ,$$

gde je Δx – *priraštaj argumenta.*

Ako diferencijal funkcije primenimo na funkciju:

$$y = x \quad \Rightarrow \quad y' = 1 \quad \Rightarrow \quad dx = \Delta x \ .$$

To znači: Za argument (nezavisnu promenljivu), pojam diferencijala se poklapa sa pojmom priraštaja.

$$\boxed{df(x) = f'(x) \cdot dx} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \ .$$

Diferencijal funkcije

Definicija

Diferencijal funkcije $\mathbf{y = f(x)}$, *u oznaci* $\mathbf{df(x)}$, *predstavlja proizvod:*

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x \ ,$$

gde je Δx – *priraštaj argumenta.*

Ako diferencijal funkcije primenimo na funkciju:

$$y = x \qquad \Rightarrow \qquad y' = 1 \qquad \Rightarrow \qquad dx = \Delta x \ .$$

To znači: Za argument (nezavisnu promenljivu), pojam diferencijala se poklapa sa pojmom priraštaja.

$$\boxed{df(x) = f'(x) \cdot dx} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \ .$$

Diferencijal funkcije

Definicija

Diferencijal funkcije $\mathbf{y = f(x)}$, *u oznaci* $\mathbf{df(x)}$, *predstavlja proizvod:*

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x \ ,$$

gde je Δx – *priraštaj argumenta.*

Ako diferencijal funkcije primenimo na funkciju:

$$y = x \qquad \Rightarrow \qquad y' = 1 \qquad \Rightarrow \qquad dx = \Delta x \ .$$

To znači: Za argument (nezavisnu promenljivu), pojam diferencijala se poklapa sa pojmom priraštaja.

$$\boxed{df(x) = f'(x) \cdot dx} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \ .$$

Diferencijal funkcije

Definicija

Diferencijal funkcije $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, *u oznaci* $\mathbf{df}(\mathbf{x})$, *predstavlja proizvod:*

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x \ ,$$

gde je Δx – *priraštaj argumenta.*

Ako diferencijal funkcije primenimo na funkciju:

$$y = x \qquad \Rightarrow \qquad y' = 1 \qquad \Rightarrow \qquad dx = \Delta x \ .$$

To znači: Za argument (nezavisnu promenljivu), pojam diferencijala se poklapa sa pojmom priraštaja.

$$\boxed{df(x) = f'(x) \cdot dx} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \ .$$

Diferencijal funkcije

Definicija

Diferencijal funkcije $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, *u oznaci* $\mathbf{df}(\mathbf{x})$, *predstavlja proizvod:*

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x \ ,$$

gde je Δx – *priraštaj argumenta.*

Ako diferencijal funkcije primenimo na funkciju:

$$y = x \qquad \Rightarrow \qquad y' = 1 \qquad \Rightarrow \qquad dx = \Delta x \ .$$

To znači: Za argument (nezavisnu promenljivu), pojam diferencijala se poklapa sa pojmom priraštaja.

$$\boxed{df(x) = f'(x) \cdot dx} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \ .$$

Diferencijal funkcije

Definicija

Diferencijal funkcije $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, *u oznaci* $\mathbf{df}(\mathbf{x})$, *predstavlja proizvod:*

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x \ ,$$

gde je $\Delta x -$ *priraštaj argumenta.*

Ako diferencijal funkcije primenimo na funkciju:

$$y = x \qquad \Rightarrow \qquad y' = 1 \qquad \Rightarrow \qquad dx = \Delta x \ .$$

To znači: Za argument (nezavisnu promenljivu), pojam diferencijala se poklapa sa pojmom priraštaja.

$$\boxed{df(x) = f'(x) \cdot dx} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \ .$$

Diferencijal funkcije

Definicija

Diferencijal funkcije $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, *u oznaci* $\mathbf{df}(\mathbf{x})$, *predstavlja proizvod:*

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x \ ,$$

gde je Δx – *priraštaj argumenta.*

Ako diferencijal funkcije primenimo na funkciju:

$$y = x \quad \Rightarrow \quad y' = 1 \quad \Rightarrow \quad dx = \Delta x \ .$$

To znači: Za argument (nezavisnu promenljivu), pojam diferencijala se poklapa sa pojmom priraštaja.

$$\boxed{df(x) = f'(x) \cdot dx} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \ .$$

Diferencijal funkcije

Definicija

Diferencijal funkcije $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, *u oznaci* $\mathbf{df}(\mathbf{x})$, *predstavlja proizvod:*

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x \ ,$$

gde je Δx – *priraštaj argumenta.*

Ako diferencijal funkcije primenimo na funkciju:

$$y = x \qquad \Rightarrow \qquad y' = 1 \qquad \Rightarrow \qquad dx = \Delta x \ .$$

To znači: Za argument (nezavisnu promenljivu), pojam diferencijala se poklapa sa pojmom priraštaja.

$$\boxed{df(x) = f'(x) \cdot dx} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \ .$$

Diferencijal funkcije

Definicija

Diferencijal funkcije $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, *u oznaci* $\mathbf{df}(\mathbf{x})$, *predstavlja proizvod:*

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x \ ,$$

gde je Δx – *priraštaj argumenta.*

Ako diferencijal funkcije primenimo na funkciju:

$$y = x \qquad \Rightarrow \qquad y' = 1 \qquad \Rightarrow \qquad dx = \Delta x \ .$$

To znači: Za argument (nezavisnu promenljivu), pojam diferencijala se poklapa sa pojmom priraštaja.

$$\boxed{df(x) = f'(x) \cdot dx} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \ .$$

Diferencijal funkcije

Definicija

Diferencijal funkcije $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, *u oznaci* $\mathbf{df}(\mathbf{x})$, *predstavlja proizvod:*

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x \ ,$$

gde je Δx – *priraštaj argumenta.*

Ako diferencijal funkcije primenimo na funkciju:

$$y = x \qquad \Rightarrow \qquad y' = 1 \qquad \Rightarrow \qquad dx = \Delta x \ .$$

To znači: Za argument (nezavisnu promenljivu), pojam diferencijala se poklapa sa pojmom priraštaja.

$$\boxed{df(x) = f'(x) \cdot dx} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \ .$$

Diferencijal funkcije

Definicija

Diferencijal funkcije $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, *u oznaci* $\mathbf{df}(\mathbf{x})$, *predstavlja proizvod:*

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x \ ,$$

gde je Δx – *priraštaj argumenta.*

Ako diferencijal funkcije primenimo na funkciju:

$$y = x \qquad \Rightarrow \qquad y' = 1 \qquad \Rightarrow \qquad dx = \Delta x \ .$$

To znači: Za argument (nezavisnu promenljivu), pojam diferencijala se poklapa sa pojmom priraštaja.

$$\boxed{df(x) = f'(x) \cdot dx} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \ .$$

Diferencijal funkcije

Definicija

Diferencijal funkcije $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, *u oznaci* $\mathbf{df}(\mathbf{x})$, *predstavlja proizvod:*

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x \ ,$$

gde je Δx – *priraštaj argumenta.*

Ako diferencijal funkcije primenimo na funkciju:

$$y = x \qquad \Rightarrow \qquad y' = 1 \qquad \Rightarrow \qquad dx = \Delta x \ .$$

To znači: Za argument (nezavisnu promenljivu), pojam diferencijala se poklapa sa pojmom priraštaja.

$$\boxed{df(x) = f'(x) \cdot dx} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \ .$$

Diferencijal funkcije

Definicija

Diferencijal funkcije $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, *u oznaci* $\mathbf{df}(\mathbf{x})$, *predstavlja proizvod:*

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x \ ,$$

gde je Δx – *priraštaj argumenta.*

Ako diferencijal funkcije primenimo na funkciju:

$$y = x \qquad \Rightarrow \qquad y' = 1 \qquad \Rightarrow \qquad dx = \Delta x \ .$$

To znači: Za argument (nezavisnu promenljivu), pojam diferencijala se poklapa sa pojmom priraštaja.

$$\boxed{df(x) = f'(x) \cdot dx} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \ .$$

Osobine diferencijala

Neka su U i V diferencijabilne funkcije:

- $d(U \pm V) = dU \pm dV$
- $d(U \cdot V) = V \cdot dU + U \cdot dV$
- $d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V \cdot dU - U \cdot dV}{V^2}$
- $d(c \cdot U) = c \cdot dU$

Osobine diferencijala

Neka su U i V diferencijabilne funkcije:

- $d(U \pm V) = dU \pm dV$
- $d(U \cdot V) = V \cdot dU + U \cdot dV$
- $d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V \cdot dU - U \cdot dV}{V^2}$
- $d(c \cdot U) = c \cdot dU$

Osobine diferencijala

Neka su U i V diferencijabilne funkcije:

- $d(U \pm V) = dU \pm dV$
- $d(U \cdot V) = V \cdot dU + U \cdot dV$
- $d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V \cdot dU - U \cdot dV}{V^2}$
- $d(c \cdot U) = c \cdot dU$

Osobine diferencijala

Neka su U i V diferencijabilne funkcije:

- $d(U \pm V) = dU \pm dV$
- $d(U \cdot V) = V \cdot dU + U \cdot dV$
- $d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V \cdot dU - U \cdot dV}{V^2}$
- $d(c \cdot U) = c \cdot dU$

Osobine diferencijala

Neka su U i V diferencijabilne funkcije:

- $d(U \pm V) = dU \pm dV$
- $d(U \cdot V) = V \cdot dU + U \cdot dV$
- $d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V \cdot dU - U \cdot dV}{V^2}$
- $d(c \cdot U) = c \cdot dU$

Primer

Primer

Odrediti diferencijal funkcije:

$$y = \ln \frac{1-x}{1+x} \ ,$$

u tački $x = 3$, *ako je priraštaj argumenta* $\Delta x = 0,1$.

Primer

Primer

Odrediti diferencijal funkcije:

$$y = \ln \frac{1-x}{1+x} \ ,$$

u tački $x = 3$, *ako je priraštaj argumenta* $\Delta x = 0,1$.

Primer

Primer

Odrediti diferencijal funkcije:

$$y = \ln \frac{1-x}{1+x} \; ,$$

u tački $x = 3$, *ako je priraštaj argumenta* $\Delta x = 0,1$.

Sadržaj

Izvodi i diferencijali višeg reda

y' , y'' , y''' , y^{iv} , ..., $y^{(12)}$, ..., $y^{(n)}$, ...

Drugi izvod (izvod drugog reda): $\quad y'' = f''(x) = \left(f'(x)\right)'$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

n-ti izvod (izvod $n-$tog reda): $\quad y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$

y' , y'' , y''' , y^{iv} , ..., $y^{(12)}$, ..., $y^{(n)}$, ...

Drugi izvod (izvod drugog reda): $$y'' = f''(x) = \left(f'(x)\right)'$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

n-ti izvod (izvod $n-$tog reda): $$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

$y'\ ,\ y''\ ,\ y'''\ ,\ y^{iv}\ , \ldots ,\ y^{(12)}\ , \ldots ,\ y^{(n)}\ , \ldots$

Drugi izvod (izvod drugog reda): $y'' = f''(x) = \big(f'(x)\big)'$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

n-ti izvod (izvod $n-$tog reda): $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \big(f^{(n-1)}(x)\big)'$

$y'\ ,\ y''\ ,\ y'''\ ,\ y^{iv}\ ,\ldots,\ y^{(12)}\ ,\ldots,\ y^{(n)}\ ,\ldots$

Drugi izvod (izvod drugog reda): $\quad y'' = f''(x) = \left(f'(x)\right)'$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

n-ti izvod (izvod n–tog reda): $\quad y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$

$y' \, , \; y'' \, , \; y''' \, , \; y^{iv} \, , \ldots , \; y^{(12)} \, , \ldots , \; y^{(n)} \, , \ldots$

Drugi izvod (izvod drugog reda): $y'' = f''(x) = \Big(f'(x)\Big)'$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

n-ti izvod (izvod *n*−tog reda): $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \Big(f^{(n-1)}(x)\Big)'$

y' , y'' , y''' , y^{iv} , ..., $y^{(12)}$, ..., $y^{(n)}$, ...

Drugi izvod (izvod drugog reda): $$y'' = f''(x) = \Big(f'(x)\Big)'$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

n-ti izvod (izvod *n*−tog reda): $$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \Big(f^{(n-1)}(x)\Big)'$$

$d^2y\ ,\ d^3y\ ,\ldots,\ d^ny\ ,\ldots$

Drugi diferencijal (diferencijal drugog reda): $d^2y = f''(x)\cdot dx^2$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

n-ti diferencijal (diferencijal $n-$tog reda): $d^ny = f^{(n)}(x)\cdot dx^n$

$d^2y\ ,\ d^3y\ , \ldots,\ d^ny\ , \ldots$

Drugi diferencijal (diferencijal drugog reda): $d^2y = f''(x) \cdot dx^2$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

n-ti diferencijal (diferencijal $n-$tog reda): $d^ny = f^{(n)}(x) \cdot dx^n$

$d^2y\ ,\ d^3y\ ,\ \ldots,\ d^ny\ ,\ \ldots$

Drugi diferencijal (diferencijal drugog reda): $d^2y = f''(x) \cdot dx^2$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

n-ti diferencijal (diferencijal *n*−tog reda): $d^ny = f^{(n)}(x) \cdot dx^n$

d^2y , d^3y , ..., d^ny , ...

Drugi diferencijal (diferencijal drugog reda): $d^2y = f''(x) \cdot dx^2$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

n-ti diferencijal (diferencijal *n*−tog reda): $d^ny = f^{(n)}(x) \cdot dx^n$

$d^2y\,,\ d^3y\,, \ldots,\ d^ny\,, \ldots$

Drugi diferencijal (diferencijal drugog reda): $d^2y = f''(x) \cdot dx^2$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

n-ti diferencijal (diferencijal *n*−tog reda): $d^ny = f^{(n)}(x) \cdot dx^n$

d^2y , d^3y , ..., d^ny , ...

Drugi diferencijal (diferencijal drugog reda): $d^2y = f''(x) \cdot dx^2$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

n-ti diferencijal (diferencijal *n*−tog reda): $d^ny = f^{(n)}(x) \cdot dx^n$

Primer

Primer

Naći treći izvod funkcije:

$$y = x^2 \ln x \ .$$

Sadržaj

Osnovne teoreme diferencijalnog računa

Lopitalovo pravilo

Guillaume de l'Hôpital, 1661-1704, francuski matematičar

Lopitalovo pravilo: Ako se pri izračunavanju granične vrednosti

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

dobija neodređeni oblik:

$$\left(\frac{0}{0}\right) \quad \text{ili} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

može se koristiti Lopitalovo pravilo:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Guillaume de l'Hôpital, 1661-1704, francuski matematičar

Lopitalovo pravilo: Ako se pri izračunavanju granične vrednosti

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

dobija neodređeni oblik:

$$\left(\frac{0}{0}\right) \quad \text{ili} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

može se koristiti Lopitalovo pravilo:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Guillaume de l'Hôpital, 1661-1704, francuski matematičar

Lopitalovo pravilo: Ako se pri izračunavanju granične vrednosti

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} ,$$

dobija neodređeni oblik:

$$\left(\frac{0}{0}\right) \quad \text{ili} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) ,$$

može se koristiti Lopitalovo pravilo:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Guillaume de l'Hôpital, 1661-1704, francuski matematičar

Lopitalovo pravilo: Ako se pri izračunavanju granične vrednosti

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} ,$$

dobija neodređeni oblik:

$$\left(\frac{0}{0}\right) \quad \text{ili} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) ,$$

može se koristiti Lopitalovo pravilo:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Primer

Primer

Izračunati graničnu vrednost:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}.$$

Primer

Primer

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2\cos 2x}=\frac{1}{2}\,.$$

Lopitalovo pravilo

Posledica

Ako je:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)\quad \textit{ili}\quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

može se ponovo primeniti Lopitalovo pravilo:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Odnosno, nastavljajući isti postupak n-puta:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ldots=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Lopitalovo pravilo

Posledica

Ako je:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) \quad \textit{ili} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

može se ponovo primeniti Lopitalovo pravilo:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Odnosno, *nastavljajući isti postupak n-puta:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Lopitalovo pravilo

Posledica

Ako je:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)\quad ili\quad\left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

može se ponovo primeniti Lopitalovo pravilo:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Odnosno, nastavljajući isti postupak n-puta:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ldots=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Lopitalovo pravilo

Posledica

Ako je:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)\quad \textit{ili}\quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

može se ponovo primeniti Lopitalovo pravilo:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Odnosno, nastavljajući isti postupak n-puta:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ldots=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Lopitalovo pravilo

Posledica

Ako je:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)\quad \textit{ili}\quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

može se ponovo primeniti Lopitalovo pravilo:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}\,.$$

Odnosno, nastavljajući isti postupak n-puta:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ldots=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}\,.$$

Lopitalovo pravilo

Posledica

Ako je:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) \quad ili \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

može se ponovo primeniti Lopitalovo pravilo:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Odnosno, nastavljajući isti postupak n-puta:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Primer

Primer

Izračunati graničnu vrednost:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 + 2x}{4x^3 + 5}.$$

Monotonost i ekstremne vrednosti funkcije

Monotonost funkcije

Definicija

Za funkciju $y = f(x)$ *kažemo da je:*

- ***monotono rastuća*** *u intervalu* (a, b), *ako za* $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ *važi:*

$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)\,, \quad f \nearrow$$

- ***monotono opadajuća*** *u intervalu* (c, d), *ako za* $\forall x_1, x_2 \in (c, d)$*:*

$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)\,, \quad f \searrow$$

Monotonost funkcije

Definicija

Za funkciju $y = f(x)$ kažemo da je:

- ***monotono rastuća*** *u intervalu* (a, b), *ako za* $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ *važi:*

$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)\,, \quad f \nearrow$$

- ***monotono opadajuća*** *u intervalu* (c, d), *ako za* $\forall x_1, x_2 \in (c, d)$:

$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)\,, \quad f \searrow$$

Monotonost funkcije

Definicija

Za funkciju $y = f(x)$ *kažemo da je:*

- ***monotono rastuća*** *u intervalu* (a, b), *ako za* $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ *važi:*

$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)\,, \quad f \nearrow$$

- ***monotono opadajuća*** *u intervalu* (c, d), *ako za* $\forall x_1, x_2 \in (c, d)$:

$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)\,, \quad f \searrow$$

Monotonost funkcije

Definicija

Za funkciju $y = f(x)$ *kažemo da je:*

- ***monotono rastuća*** *u intervalu* (a, b), *ako za* $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ *važi:*

$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)\,, \qquad f \nearrow$$

- ***monotono opadajuća*** *u intervalu* (c, d), *ako za* $\forall x_1, x_2 \in (c, d)$*:*

$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)\,, \qquad f \searrow$$

Monotonost funkcije

Definicija

Za funkciju $y = f(x)$ *kažemo da je:*

- ***monotono rastuća*** *u intervalu* (a, b)*, ako za* $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ *važi:*

$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)\,, \qquad f \nearrow$$

- ***monotono opadajuća*** *u intervalu* (c, d)*, ako za* $\forall x_1, x_2 \in (c, d)$*:*

$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)\,, \qquad f \searrow$$

Monotonost funkcije

Definicija

Za funkciju $y = f(x)$ *kažemo da je:*

- ***monotono rastuća*** *u intervalu* (a, b)*, ako za* $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ *važi:*

$$x_1 \leq x_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) \leq f(x_2)\ , \qquad f \nearrow$$

- ***monotono opadajuća*** *u intervalu* (c, d)*, ako za* $\forall x_1, x_2 \in (c, d)$*:*

$$x_1 \leq x_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) \geq f(x_2)\ , \qquad f \searrow$$

Monotonost funkcije

Definicija

Za funkciju $y = f(x)$ *kažemo da je:*

- ***monotono rastuća*** *u intervalu* (a, b), *ako za* $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ *važi:*

$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)\,, \qquad f \nearrow$$

- ***monotono opadajuća*** *u intervalu* (c, d), *ako za* $\forall x_1, x_2 \in (c, d)$:

$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)\,, \qquad f \searrow$$

Monotonost funkcije

Definicija

Za funkciju $y = f(x)$ kažemo da je:

- ***monotono rastuća*** *u intervalu (a, b), ako za $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ važi:*

$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)\ , \qquad f \nearrow$$

- ***monotono opadajuća*** *u intervalu (c, d), ako za $\forall x_1, x_2 \in (c, d)$:*

$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)\ , \qquad f \searrow$$

Monotonost funkcije

Definicija

Za funkciju $y = f(x)$ *kažemo da je:*

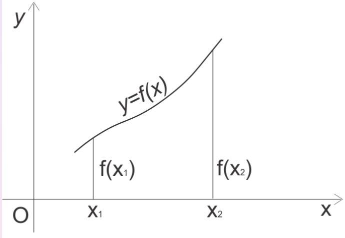
- ***monotono rastuća*** *u intervalu* (a, b)*, ako za* $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ *važi:*

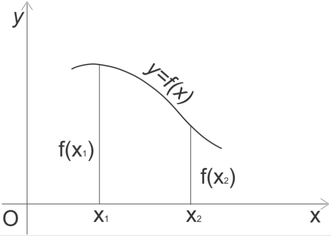
$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)\,, \qquad f \nearrow$$

- ***monotono opadajuća*** *u intervalu* (c, d)*, ako za* $\forall x_1, x_2 \in (c, d)$*:*

$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)\,, \qquad f \searrow$$

Rastuća i opadajuća funkcija





$f \nearrow$ $\qquad$ $f \searrow$

Monotonost funkcije

Teorema

Ako je prvi izvod funkcije $y = f(x)$*:*

- $f'(x) > 0, \quad \forall x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad$ *funkcija je* ***rastuća*** *na* (a, b)
- $f'(x) < 0, \quad \forall x \in (c, d) \quad \Rightarrow \quad$ *funkcija je* ***opadajuća*** *na* (c, d)

Monotonost funkcije

Teorema

Ako je prvi izvod funkcije $y = f(x)$*:*

- $f'(x) > 0, \quad \forall x \in (a, b) \quad \Rightarrow$ *funkcija je* ***rastuća*** *na* (a, b)
- $f'(x) < 0, \quad \forall x \in (c, d) \quad \Rightarrow$ *funkcija je* ***opadajuća*** *na* (c, d)

Monotonost funkcije

Teorema

Ako je prvi izvod funkcije $y = f(x)$*:*

- $f'(x) > 0, \quad \forall x \in (a, b) \quad \Rightarrow$ *funkcija je* ***rastuća*** *na* (a, b)
- $f'(x) < 0, \quad \forall x \in (c, d) \quad \Rightarrow$ *funkcija je* ***opadajuća*** *na* (c, d)

Monotonost funkcije

Teorema

Ako je prvi izvod funkcije $y = f(x)$*:*

- $f'(x) > 0, \quad \forall x \in (a, b) \qquad \Rightarrow$ *funkcija je* ***rastuća*** *na* (a, b)
- $f'(x) < 0, \quad \forall x \in (c, d) \qquad \Rightarrow$ *funkcija je* ***opadajuća*** *na* (c, d)

Monotonost funkcije

Teorema

Ako je prvi izvod funkcije $y = f(x)$*:*

- $f'(x) > 0, \quad \forall x \in (a, b) \qquad \Rightarrow \qquad$ *funkcija je* ***rastuća*** *na* (a, b)
- $f'(x) < 0, \quad \forall x \in (c, d) \qquad \Rightarrow \qquad$ *funkcija je* ***opadajuća*** *na* (c, d)

Lokalni ekstemumi

Definicija

Za funkciju $y = f(x)$ kažemo da ima:

- ***lokalni maksimum** u tački* **a** *, ako za svako* **x** *iz okoline tačke* **a** *važi da je*

$$f(a) \geq f(x),$$

- ***lokalni minimum** u tački* **a** *, ako za svako* **x** *iz okoline tačke* **a** *važi da je*

$$f(a) \leq f(x).$$

Lokalni ekstemumi

Definicija

Za funkciju $y = f(x)$ *kažemo da ima:*

- ***lokalni maksimum** u tački* $\mathbf{a}$ *, ako za svako* $\mathbf{x}$ *iz okoline tačke* $\mathbf{a}$ *važi da je*

$$f(a) \geq f(x),$$

- ***lokalni minimum** u tački* $\mathbf{a}$ *, ako za svako* $\mathbf{x}$ *iz okoline tačke* $\mathbf{a}$ *važi da je*

$$f(a) \leq f(x).$$

Lokalni ekstemumi

Definicija

Za funkciju $y = f(x)$ *kažemo da ima:*

- ***lokalni maksimum*** *u tački* **a** *, ako za svako* **x** *iz okoline tačke* **a** *važi da je*

$$f(a) \geq f(x),$$

- ***lokalni minimum*** *u tački* **a** *, ako za svako* **x** *iz okoline tačke* **a** *važi da je*

$$f(a) \leq f(x).$$

Lokalni ekstemumi

Definicija

Za funkciju $y = f(x)$ *kažemo da ima:*

- ***lokalni maksimum*** *u tački* **a** *, ako za svako* **x** *iz okoline tačke* **a** *važi da je*
$$f(a) \geq f(x),$$
- ***lokalni minimum*** *u tački* **a** *, ako za svako* **x** *iz okoline tačke* **a** *važi da je*
$$f(a) \leq f(x).$$

Lokalni ekstemumi

Definicija

Za funkciju $y = f(x)$ *kažemo da ima:*

- ***lokalni maksimum*** *u tački* **a** , *ako za svako* **x** *iz okoline tačke* **a** *važi da je*
$$f(a) \geq f(x),$$
- ***lokalni minimum*** *u tački* **a** , *ako za svako* **x** *iz okoline tačke* **a** *važi da je*
$$f(a) \leq f(x).$$

Lokalni ekstemumi

Definicija

Za funkciju $y = f(x)$ *kažemo da ima:*

- ***lokalni maksimum*** *u tački* **a** *, ako za svako* **x** *iz okoline tačke* **a** *važi da je*
$$f(a) \geq f(x),$$
- ***lokalni minimum*** *u tački* **a** *, ako za svako* **x** *iz okoline tačke* **a** *važi da je*
$$f(a) \leq f(x).$$

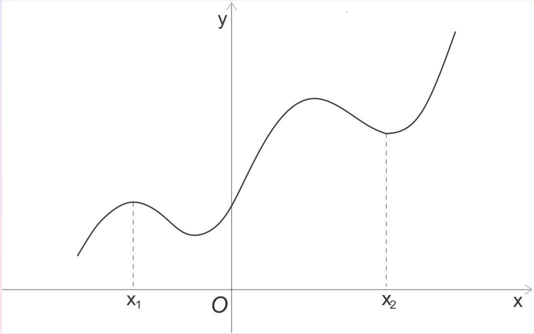
Lokalni ekstemumi

Definicija

Za funkciju $y = f(x)$ *kažemo da ima:*

- ***lokalni maksimum*** *u tački* **a** *, ako za svako* **x** *iz okoline tačke* **a** *važi da je*
$$f(a) \geq f(x),$$
- ***lokalni minimum*** *u tački* **a** *, ako za svako* **x** *iz okoline tačke* **a** *važi da je*
$$f(a) \leq f(x).$$

Lokalni ekstemumi



Ekstremne vrednosti

Definicija

Stacionarne tačke *su tačke u kojima je prvi izvod jednak nuli.*

Funkcija ima ekstremne vrednosti u onim stacionarnim tačkama u kojima prvi izvod menja znak, i to:

- tačku MAKSIMUMA, ako menja znak iz $"+"$ u $"-"$,
- tačku MINIMUMA, ako menja znak iz $"-"$ u $"+"$.

Ekstremne vrednosti

Definicija

Stacionarne tačke *su tačke u kojima je prvi izvod jednak nuli.*

Funkcija ima ekstremne vrednosti u onim stacionarnim tačkama u kojima prvi izvod menja znak, i to:

- tačku MAKSIMUMA, ako menja znak iz $"+"$ u $"-"$,
- tačku MINIMUMA, ako menja znak iz $"-"$ u $"+"$.

Ekstremne vrednosti

Definicija

Stacionarne tačke *su tačke u kojima je prvi izvod jednak nuli.*

Funkcija ima ekstremne vrednosti u onim stacionarnim tačkama u kojima prvi izvod menja znak, i to:

- tačku MAKSIMUMA, ako menja znak iz $"+"$ u $"-"$,
- tačku MINIMUMA, ako menja znak iz $"-"$ u $"+"$.

Ekstremne vrednosti

Definicija

Stacionarne tačke *su tačke u kojima je prvi izvod jednak nuli.*

Funkcija ima ekstremne vrednosti u onim stacionarnim tačkama u kojima prvi izvod menja znak, i to:

- tačku MAKSIMUMA, ako menja znak iz $"+"$ u $"-"$,
- tačku MINIMUMA, ako menja znak iz $"-"$ u $"+"$.

Ekstremne vrednosti

Definicija

Stacionarne tačke *su tačke u kojima je prvi izvod jednak nuli.*

Funkcija ima ekstremne vrednosti u onim stacionarnim tačkama u kojima prvi izvod menja znak, i to:

- tačku MAKSIMUMA, ako menja znak iz $\; " + " \;$ u $\; " - " \;$,
- tačku MINIMUMA, ako menja znak iz $\; " - " \;$ u $\; " + " \;$.

Ekstremne vrednosti

Definicija

Stacionarne tačke *su tačke u kojima je prvi izvod jednak nuli.*

Funkcija ima ekstremne vrednosti u onim stacionarnim tačkama u kojima prvi izvod menja znak, i to:

- tačku MAKSIMUMA, ako menja znak iz $\;"+"\;$ u $\;"-"\;$,
- tačku MINIMUMA, ako menja znak iz $\;"-"\;$ u $\;"+"\;$.

Ekstremne vrednosti

Definicija

Stacionarne tačke *su tačke u kojima je prvi izvod jednak nuli.*

Funkcija ima ekstremne vrednosti u onim stacionarnim tačkama u kojima prvi izvod menja znak, i to:

- tačku MAKSIMUMA, ako menja znak iz $\;"+"\;$ u $\;"-"\;$,
- tačku MINIMUMA, ako menja znak iz $\;"-"\;$ u $\;"+"\;$.

Primer

Primer

Ispitati monotonost i ekstremne vrednosti funkcije:

$$y = x^3 - 3x\ .$$